Aufgabe 3:

Sei H eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$.

Ist $H = \{0\}$, so wählen wir $n = 0$. } 1 Pkt

Sei also von nun an H nicht trivial. Es ex. also ein Element $m \in H$ mit $m \neq 0$. Da H eine Gruppe ist, liegt auch $-m$ in H, sodass H ein positives Element enthält (ist $m<0$, so $-m>0$; $m>0$ ✓). Sei nun $n \in H$ minimal mit $n > 0$. Dann erhalten wir zunächst eine Inklusion $n\mathbb{Z} \subset H$ und wir behaupten nun, dass diese Inklusion eine Gleichheit ist.

1 Pkt

Ang., es ex. ein $h \in H$ mit $h \notin n\mathbb{Z}$. Dann gilt auch $-h \notin n\mathbb{Z}$, sodass wir annehmen können, dass $h > 0$ ist (ansonsten nehme $-h$). Division mit Rest liefert nun

$$h = qn + r$$

mit $0 < r < n$, da $h \notin n\mathbb{Z}$. Da $h \in H$ und $qn \in n\mathbb{Z} \subset H$, gilt auch $r = h - qn \in H$, was ein Widerspruch zur Minimalität von n ist. Also $H = n\mathbb{Z}$.

1 Pkt

1 Pkt

Wir zeigen allgemeiner, dass der Schnitt zweier Untergruppen H, H' einer Gruppe G erneut eine Untergruppe ist:

(i) Da $1_G \in H$ und $1_G \in H'$, gilt $1_G \in H \cap H'$

(ii) Seien $h, h' \in H \cap H'$. Dann gelten $h \cdot h' \in H$ und $h \cdot h' \in H'$, da H und H' Untergruppen von G sind. Also $h \cdot h' \in H \cap H'$.

(iii) Sei $h \in H \cap H'$. Dann ist $h^{-1} \in H$ und $h^{-1} \in H'$, da H und H' Untergruppen von G sind, sodass h^{-1} auch in $H \cap H'$ enthalten ist.

Somit ist $H \cap H'$ eine Untergruppe von G.

1 Pkt.

Behauptung: $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = \text{kgV}(m,n)\mathbb{Z}$

Sei $g \in n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$, also $g = na = mb$ für $a, b \in \mathbb{Z}$. Das Element g ist also ein Vielfaches von n und m und somit auch von $\text{kgV}(m,n)$. Somit $g \in \text{kgV}(m,n)\mathbb{Z}$.

Sei $g \in \text{kgV}(m,n)\mathbb{Z}$, also $g = \text{kgV}(m,n)a$ für ein $a \in \mathbb{Z}$. Da $\text{kgV}(m,n) = bm = cn$ für geeignete $b, c \in \mathbb{Z}$, gilt also $g \in n\mathbb{Z}$ und $g \in m\mathbb{Z}$.

1 Pkt

Aufgabe 4

A [redacted] ist eine Untergruppe:

(i) $d_0 = id \in A$

(ii) $d_0 \circ d_0 = d_0 \in A$
$d_0 \circ s_x = s_x \in A$
$s_x \circ d_0 = s_x \in A$
$s_x \circ s_x = d_0 \in A$

(iii) $d_0^{-1} = d_0 \in A$
$s_x^{-1} = s_x \in A$

1 Pkt

B ist keine Untergruppe:

$s_x, s_y \in B$, aber $s_x \circ s_y = d_2 \notin B$

C ist eine Untergruppe:

(i) $d_0 = id \in C$

(ii) $d_i \circ d_j = d_{i+j \pmod 4} \in C$
für alle $0 \le i,j \le 3$

(iii) $d_i^{-1} = d_{4-i \pmod 4} \in C$

A ist keine normale Untergruppe, da

$\underbrace{d_3^{-1}}_{= d_1} \circ s_x \circ d_3 = s_y \notin A$. [redacted]

1 Pkt

C ist eine normale Untergruppe:

$d_j^{-1} \circ d_i \circ d_j \in C$ (siehe C ist Untergruppe)

für [redacted] alle $0 \le i,j \le 3$.

$s_*^{-1} \circ d_i \circ s_* \in C$ (siehe letztes Blatt Aufgabe 3: Drehung ∘ Spiegelung ist Spiegelung und Spiegelung ∘ Spiegelung ist stets eine Drehung)

für alle $0 \le i \le 3$ und $* \in \{x, y, n, d\}$.

1 Pkt

$S_\square / C$ hat zwei Elemente und muss somit aus

- einem neutralen Element bestehen
- einem Element g mit $g^2 = 1$ (sonst keine Gruppe)

⇝ $S_\square / C \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, wobei das nicht-triviale Element [redacted] die Äquivalenzklasse der Spiegelungen [redacted] ist.

Definiere

$i: S_\square \to S_4$ vermöge

$d_0 \mapsto id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$d_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$d_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$d_3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

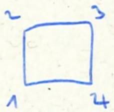
$s_x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$s_y \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$s_a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$s_n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Ist ein Gruppenhomomorphismus, da die Abbildung i nur eine Übersetzung der Elemente von $S_\square$ auf die vier Eckpunkte



des Quadrates ist. Zudem sieht man, dass $\ker(i) = \{d_0\}$, sodass i injektiv ist.

1 Pkt.
hier gnädig sein!
Muss nicht super detailliert sein, aber wenigstens sinnvolle Abb.

1 Pkt

$\mathrm{im}(i)$ ist keine normale Untergruppe von S_4, da

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{im}(i)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \notin \mathrm{im}(i)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$